"An attempt at visualizing the Fourth Dimension:
Take a point, stretch it into a line,
curl it into a circle, twist it into a sphere,
and punch through the sphere."

Theorie de la dimension

(rappel)

famill e generatrice

DÉFINITION 5.15. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble $\mathscr{G} \subset V$ est une famille generatrice si*

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \langle \mathscr{G} \rangle_K = V,$$

ie. tout element $v \in V$ peut s'ecrire sous la forme d'une combinaison lineaire (finie) a coefficients dans K d'elements de $\mathscr{G}$: pour tout $v \in V$ il existe $n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in K$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathscr{G}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i. = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n. \tag{5.3.1}$$

Si V admet une famille generatrice finie, on dit que V est un K-module ou un K-ev de type fini.

aussi K-ev de dim finie.

Définition. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble fini*

$$\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$$

est une famille generatrice (du K-ev V) ssi les conditions equivalentes suivantes sont satisfaites:

(1) On a

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = V.$$

(2) pour tous $v \in V$, il existe $x_1, \cdots, x_d \in K$ tels que

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d.$$

(3) L'application lineaire

$$CL_{\mathscr{G}} : \begin{array}{ccc} K^d & \mapsto & V \\ (x_1, \cdots, x_d) & \mapsto & x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d \end{array}$$

est surjective.

Si V admet une famille generatrice finie ou dit que V est un K-ev de type fini ou est de dimension finie.

Dimension si V est de type fini

la dimension de V

$$\dim V = \min_{\substack{\mathcal{G} \subset V \\ \text{et génératrice} \\ \text{finie}}} |\mathcal{G}|$$

$$\dim V = 0 \iff V = \{0\}.$$

THÉORÈME 5.3. *Tout K-espace vectoriel de dimension finie $d = \dim V$ est isomorphe (comme K-ev) a l'espace vectoriel K^d (avec la convention que $\{0_K\} = K^0$). En d'autres termes V est isomorphe au K-module libre de rang $d = \dim(V)$, K^d.*

THE WARNING

Absolument faux si K est un anneau general et V un K-module de type fini.

$$CL_{\mathscr{G}} : \begin{array}{ccc} K^d & \mapsto & V \\ (x_1, \cdots, x_d) & \mapsto & CL_{\mathcal{G}}(x_1, \cdots, x_d) = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d \end{array}.$$

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{G} \subset V$ une famille generatrice de V de cardinal $d = \dim V$ alors l'application $CL_{\mathcal{G}}$ est injective et defini donc un isomorphisme*

$$CL_{\mathcal{G}} : K^d \simeq V.$$

Corollaire 5.3 (Critere dimensionel d'isomorphisme). *Soient* V, W *des* K*-ev de dimensions finie* d_V *et* d_W *alors* V *et* W *sont isomorphes ssi ils ont meme dimension:*

$$V \simeq W \iff d_V = d_W.$$

Famille Libre

Définition 5.17. *Un sous-ensemble fini $\mathscr{F} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_f\} \subset V$ d'un espace vectoriel est une famille libre de V si et seulement si l'une des trois conditions equivalentes suivante est satisfaite:*

(1) L'application lineaire

$$CL_{\mathscr{F}} : \begin{array}{ccc} K^f & \mapsto & V \\ (x_1, \cdots, x_f) & \mapsto & x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f \end{array}$$

est injective.

(2) pour tous $x_1, \cdots, x_f,\ x'_1, \cdots, x'_f \in K$

$$x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f = x'_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x'_f.\mathbf{e}_f \Longrightarrow x_1 - x'_1 = \cdots = x_f - x'_f = 0_K.$$

(3) pour tous $x_1, \cdots, x_f \in K$

$$x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_f.\mathbf{e}_f = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_f = 0_K.$$

Une famille $\mathscr{F}$ qui n'est pas libre est dit liee.

Théorème 5.4 (Majoration du cardinal d'une famille libre). *Soit V un espace vectoriel non-nul de dimension d et $\mathscr{F} = \{v_1, \cdots, v_f\} \subset V$ une famille finie et libre; alors $f \leqslant d$.*

__Exemples__ $e \in V - \{0\}$ (si $V \neq \{0\}$)

$\{e\}$ est libre

- si G est génératrice de taille $\dim V$ alors G est libre.

Bases

Définition 5.18. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Une famille $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ est une base de V si l'une des conditions equivalentes suivantes est verifiee:*

(1) *$\mathscr{B}$ est generatrice et libre,*

(2) *L'application combinaison lineaire de $\mathscr{B}$,*

$$CL_{\mathscr{B}} : K^d \mapsto V$$

est un isomorphisme,

(3) *Pour tout $v \in V$ il existe un unique uplet $(x_1, \cdots, x_d) \in K^d$ tel que v s'ecrit sous la forme*

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d.$$

Théorème 5.5. *Soit V un K-ev de dimension d alors V possede une base et toute base $\mathscr{B}$ de V verifie*

$$|\mathscr{B}| = \dim(V). \tag{5.3.3}$$

Extraction, Completion

THÉORÈME 5.6 (Extraction et Completion). *Soit V un K-ev non nul de dimension d. On a*

(1) Une famille generatrice $\mathscr{G}$ de cardinal d est une base.
(2) Une famille libre $\mathscr{L}$ de cardinal d est une base.
(3) (Extraction) Soit $\mathscr{G} \subset V$ une famille generatrice alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V contenue dans $\mathscr{G}$.
(4) (Completion) Soit $\mathscr{L} \subset V$ une famille libre alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V contenant $\mathscr{L}$.

THÉORÈME 5.7 (de la base incomplete). *Etant donne $\mathscr{L}$ une famille libre de V et $\mathscr{B} \subset V$ une base, on peut extraire de $\mathscr{B}$ une sous-famille $\mathscr{L}' \subset \mathscr{B}$ de sorte que $\mathscr{L} \sqcup \mathscr{L}'$ forme une base de V.*

SEV et dimension

Théorème 5.8 (Bases et SEV). *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel alors W est de dimension finie et*

(1) on a $\dim(W) \leqslant \dim(V)$.
(2) Si $\dim(W) = \dim(V)$ *alors* $W = V$.
(3) Si $\mathscr{B}_W$ est une base de W alors il existe une base $\mathscr{B}_V$ de V contenant $\mathscr{B}_W$.

- Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelle *droite vectorielle* .
- Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelle *plan vectoriel.*
- Un sous-espace vectoriel de dimension $\dim(V) - 1$ est appelle *hyperplan vectoriel.*

Dimension infinie

DÉFINITION 5.19. *Un K-ev qui ne possede pas de famille generatrice finie est dit de dimension infinie.*

Exemple :

DÉFINITION 5.20. *Soit V un K-e.v. Un sous-ensemble $\mathscr{G} \subset V$ est une famille generatrice si*

$$\operatorname{Vect}(\mathscr{G}) = V,$$

ie. tout element $v \in V$ peut s'ecrire sous la forme d'une combinaison lineaire (finie) d'elements de $\mathscr{G}$: il existe $d \geqslant 1$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d \in \mathscr{G}$, $x_1, \cdots, x_d \in K$,, tels que

$$v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d. \tag{5.4.1}$$

DÉFINITION 5.21. *Soit V un K-e.v., un sous-ensemble $\mathscr{L} \subset V$ est une famille libre si tout sous-ensemble fini $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ est libre: si $\mathscr{L}' = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ (les elements tous distincts), on a*

$$x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_d = 0_K. \tag{5.4.2}$$

Théorème 5.9 (Existence de bases sous l'axiome du choix). *Dans une theorie des ensembles contenant l'axiome du choix, tout espace vectoriel sur un corps K possede une base et toutes les bases de V ont meme cardinal: pour toutes bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ il existe une bijection*

$$\mathscr{B} \simeq \mathscr{B}'.$$

La dimension de V est de cardinal d'une base:

$$\dim(V) = |\mathscr{B}|.$$

Applications Lineaires

<u>Def</u>: V, W des K-evs une application

$\varphi : V \longrightarrow W$ est K-linéaire ssi

$\forall \lambda \in K \ \forall v, v' \in V$

$$\varphi(\lambda . v + v') = \lambda . \varphi(v) + \varphi(v')$$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n).$$

Rang:

PROPOSITION 6.1. *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire avec V de dimension finie. Soit $\mathscr{G} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_g\} \subset V$ une famille generatrice alors φ est completement determinee par l'ensemble de images des elements de $\mathscr{G}$:*

$$\varphi(\mathscr{G}) = \{\varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_g)\} \subset W.$$

En particulier, $\varphi(\mathscr{G})$ est une famille generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V)$ et on a

$$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leqslant \dim(V).$$

Rmq: "complement determinée"

si φ et ψ sont lineaire et tq

$\forall i = 1 \dots g \quad \varphi(e_i) = \psi(e_i)$ alors

$$\varphi = \psi$$

Preuve : soit $v \in V$ comme $\mathcal{G}$ est generatrice

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_g e_g \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_g \in K$$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_g e_g) =$$

$$\lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_g \varphi(e_g).$$

soit $w \in \operatorname{Im} \varphi$ il existe v tq

$$\varphi(v) = w \text{ et } \varphi(v) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_g \varphi(e_g) = w$$

$\square$

__Cor:__ si $\varphi : V \twoheadrightarrow W$ (surjective)

alors $\varphi(\mathcal{G}) = \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_g)\}$

est generatrice de W.

$(\mathrm{Im}\,\varphi = W)$

$\mathrm{Im}\,\varphi$ est de dim finie car engendrée par $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_g)\}$

et $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq |\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_g)\}|$

$$\leq |\{e_1, \dots, e_g\}| = g$$

en particulier ici $\mathcal{G}$ est une base de V

$g = \dim V$

On obtient que

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \dim V}$$

De plus comme $\mathrm{Im}\,\varphi \subset W$

$\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \dim W$ et on obtient

Définition 6.1. *Soit* $\varphi : V \mapsto W$ *une application lineaire. Le rang de* φ *est la dimension de* $\operatorname{Im}\varphi$*:*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Proposition 6.2 (Inegalite du rang). *Soit* V *de dimension finie. On a*

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi) \leqslant \min(\dim V, \dim W).$$

Theoreme Noyau-Image

THÉORÈME 6.1 (Noyau-Image). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire avec V de dimension finie. On a*

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi).$$

<u>Preuve:</u> soit $r = \dim \operatorname{Im} \varphi$

et $\{w_1, \dots, w_r\}$ une base de $\operatorname{Im} \varphi$

il existe $v_1, \dots, v_r \in V$ tq

$\forall i = 1 \dots r \quad \varphi(v_i) = w_i$. $\qquad r = \dim \operatorname{Im} \varphi$

soit $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base de $\ker \varphi$

$k = \dim \ker \varphi$

Alors $\{v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_k\}$ est une base de V.

Cette famille est libre : soient $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k \in K$ tq

$$v := x_1 v_1 + \dots + x_r v_r + y_1 e_1 + \dots + y_k e_k = 0_V$$

$$\varphi(v) = \varphi(0_V) = 0_W$$

$$0_W = x_1\varphi(v_1)+\dots+x_r\varphi(v_r)+$$
$$y_1\varphi(e_1)+\dots+y_k\varphi(e_k)$$

$$\varphi(e_j)=0_W \qquad j=1\dots k$$

$$\Rightarrow 0_W = x_1\varphi(v_1)+\dots+x_r\varphi(v_r)$$
$$= x_1\cdot w_1+\dots+x_r\cdot w_r$$

Comme $\{w_1,\dots,w_r\}$ est libre

$\Rightarrow x_1 = \cdots = x_r = 0$.

$\Rightarrow V = 0_V = y_1 e_1 + \cdots + y_r e_k$

$\{e_1, \cdots, e_k\}$ est lebre $\Rightarrow y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$

La famille est libre.

La famille est generatrice:

Soit $v \in V$ on veut mq v est CL

de $\{v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_k\}$

$\varphi(v) = w \in \mathrm{Im}\,\varphi$: il existe $x_1, \dots, x_r \in K$

$w = x_1 w_1 + \dots + x_r w_r$ ($\{w_1, \dots, w_r\}$ est sgn de $\mathrm{Im}\,\varphi$)

soit $v_{Im} = x_1 v_1 + \dots + x_r \cdot v_r \in V$

Soit $v_k = v - v_{Im} \in V$

$$\varphi(v_k) = \varphi(v - v_{Im})$$
$$= \varphi(v) - \varphi(v_{Im})$$
$$= w - x_1\varphi(v_1) - \dots - x_r\varphi(v_r)$$
$$= w - (x_1 w_1 + \dots + x_r w_r)$$
$$= w - w = 0_W$$

$\Rightarrow v_k \in \ker\varphi$: il existe

$y_1, \dots, y_k \in K$ tq $v_k = y_1 e_1 + \dots + y_k e_k$

$$V = V_{Im} + V_k$$

$$= x_1 v_1 + \dots + x_r v_r + y_1 e_1 + \dots + y_k e_k$$

$\{v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_k\}$ est une base de V

$$\dim V = |\{v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_k\}|$$

$$= r + k = \dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \varphi$$

$\square$

Corollaire 6.1 (Critere de bijectivite). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre espaces de dimension finie. Si*

$$\dim(V) = \dim(W)$$

alors est conditions suivantes sont equivalentes

(1) *φ est injective.*
(2) *φ est surjective*
(3) *φ est bijective.*

<u>Preuve</u> (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

φ injective $\Rightarrow \ker\varphi = \{0_V\}$ $\dim\ker\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim\ker\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,\varphi \\ \| \\ \dim W \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\,\varphi \subset W$ et a m̂ dim que W

$\mathrm{Im}\,\varphi = W \Rightarrow \varphi$ surjective

$\Rightarrow \varphi$ surjective $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim W$

$= \dim V$

$\Rightarrow \dim \ker \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi = 0$

$\Rightarrow \ker \varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ inj et

φ = inj + surj = bijective.

si φ est bijecti $\Rightarrow \varphi$ injective.

$\square$

Cas des formes lineaires

DÉFINITION 6.2. *Une forme lineaire sur V est une application lineaire de V a valeurs dans le corps K (vu comme K-ev sur lui-meme)*

$$\ell : V \mapsto K.$$

On a la proposition suivante:

PROPOSITION 6.3. *Soit ℓ une forme lineaire. Si elle est non-nulle, i.e. $\ell \neq \underline{0}_K$, alors*

$$\mathrm{Im}(\ell) = K, \ \dim(\ker l) = \dim(V) - 1.$$

Preuve: si $\ell \neq \underline{0}_K$ alors $\mathrm{Im}\,\ell \subset K$

est un sev non-nul de K de $\dim > 0$

$\dim \mathrm{Im}\,\ell \geq 1 = \dim K \Rightarrow \mathrm{Im}\,\ell = K$

Donc $\dim \ker \ell = \dim V - \dim \operatorname{Im} \ell$

$= \dim V - 1.$

- **Rmq:** si $\ell \neq 0_K$ il existe $e \in V$ tq

$\ell(e) = \lambda \neq 0_K$

$\forall \lambda' \in K$ si $\lambda' = 0$ $\ell(0.e) = 0$

si $\lambda' \neq 0$ $\ell\left(\frac{\lambda'}{\lambda} . e\right) = \frac{\lambda'}{\lambda} . \ell(e) = \frac{\lambda'}{\lambda} \lambda = \lambda'$

Définition 6.3. *Un sous-espace vectoriel de dimension* $\dim V - 1$ *est appelle un hyperplan vectoriel.*

Prop : tout hyperplan vectorielle est le noyau d'un forme lineaire $\neq \underline{0}_K$

Preuve soit $d = \dim V$ H V hyperplan

$\{e_1, \dots, e_{d-1}\}$ une base de H

soit $e_d \in V$ tq $\{e_1, \dots, e_{d-1}, e_d\}$ soit une base de V

tout elt de V s'écrit uniquement

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_{d-1} e_{d-1} + x_d e_d$$

et les elts de H sont exactement les v

tq $x_d = 0_K$.

$$H = \ker\left(e_d^* : x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \to x_d \in K\right)$$

$\square$

Structure et dimension des espaces d'applications linéaires

<u>Rappel</u> : V, W ds K-evs.

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ = l'ensemble des appli lineire de V vers W

On a vu que $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ st un K-ev.

$\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ $\quad \lambda \in K$

$\lambda\varphi + \psi : v \longrightarrow \lambda\varphi(v) + \psi(v)$

est K-lineaire.

Théorème 6.2 (Dimension de l'espace des applications lineaires). *Si V et W sont de dimensions finies, alors $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ est de dimension finie*

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V,W)) = \dim V.\dim W.$$

<u>Preuve</u>: $d_V = \dim V$ $d_W = \dim W$ $d_V = d$

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ une base de V.

$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. On a vu qui φ et complètement déterminée si on connait $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_d)) \in W^{d_V}$

Autrement dit soit

$$\mathrm{Eval}_B : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow W^d = \underbrace{W \times W \times \dots \times W}_{d \text{ fois}}$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d))$$

est injective.

Eval_B est linéaire : $e \in B$

$$\mathrm{eval}_e(\lambda\varphi + \psi) = \lambda\varphi(e) + \psi(e)$$

On va mq Eval_B est surjective

$\Rightarrow$ Eval_B est un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \xrightarrow{\sim} W^{d_V}$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Hom}_K(V,W) = \dim W^d = d \dim W$$
$$= \dim V \dim W$$

$$d_V = d$$

Soit $(w_1, \dots, w_d) \in W^d$ on cherche

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tq $\varphi(e_i) = w_i$ $i=1 \dots d$

On pose φ qui a $v \in V$ associe

$$v = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_d e_d \quad x_i \in K$$

(les x_i sont uniquement definis)

$$\varphi(v) := x_1 w_1 + \dots + x_d w_d$$

l'application φ ainsi définie est linéaire :

$$\varphi(\lambda v + v') = \varphi((\lambda x_1 + x_1')e_1 + \dots + (\lambda x_d + x_d')e_d)$$
$$= (\lambda x_1 + x_1')\varphi(e_1) + \dots + (\lambda x_d + x_d')\varphi(e_d)$$
$$= \lambda(x_1\varphi(e_1) + \dots + x_d\varphi(e_d))$$
$$+ x_1'\varphi(e_1) + \dots + x_d'\varphi(e_d)$$
$$= \lambda\varphi(v) + \varphi(v')$$

$\square$

DUALITY

SLIPKNOT TR1BUT3

“I push my fingers into my eyes,
It’s the only thing that slowly stops the ache ”

Formes linéaires, Dualité

DÉFINITION 6.4. *Une application lineaire, $\ell : V \mapsto K$, de V vers le corps K est appelee "forme lineaire". On note l'espace des formes lineaires par*

$$V^* := \mathrm{Hom}_{K-ev}(V, K)$$

et on l'appelle le dual de V.

comme $\dim_K K = 1$ $\quad d = \dim V$

$\dim V^* = \dim_K V$ en particulier $V \simeq V'$

On va expliciter une base de V^*

soit $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ une base V

DÉFINITION 6.5. *Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V, si $v \in V$ s'ecrit*

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d,$$

pour $i \leqslant d$, le scalaire x_i est la i-eme coordonnee de v dans la base $\mathscr{B}$. On note ce scalaire

$$x_i = \mathbf{e}_i^*(v).$$

PROPOSITION 6.5. *Pour $i \leqslant d$, l'application*

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d.\mathbf{e}_d \in V \mapsto \mathbf{e}_i^*(v) = x_i \in K$$

est une forme lineaire . On l'appelle la i-ieme forme lineaire coordonnee relative a la base $\mathscr{B}$ de V.

<u>Preuve</u> : soit $v, v' \in V$ $\lambda \in K$

$$e_1^*(\lambda v + v') = e_1^*((\lambda x_1 + x_1')e_1 + \dots + (\lambda x_d + x_d')e_d)$$

$$= \lambda x_1 + x_1' = \lambda e_1^*(v) + e_1^*(v')$$

$\square$

THÉORÈME 6.3. *Soit $\mathscr{B}$ une base de V, la famille*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

est une base de V^*. On a

$$\forall i, j \leqslant d,\ \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 6.6. *La base*

$$\mathscr{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

s'appelle la base duale de la base $\mathscr{B}$.

Preuve: Mq $\{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ est libre

soient $x_1, \dots, x_d$ tq

$l = x_1 e_1^* + \dots + x_d e_d^* \equiv \underline{0}_K$

On calcule $l(e_1) = 0_K$

$$l(e_1) = x_1 e_1^*(e_1) + x_2 e_2^*(e_1) + \dots + x_d e_d^*(e_1)$$

$$e_1^*(e_1) = 1 \quad e_2^*(e_1) = 0 \qquad e_d^*(e_1) = 0$$

en d'autres termes $e_i^*(e_1) = \delta_{i=1}$

$$l(e_1) = x_1 \cdot 1 = x_1 = 0_K$$

on répète pour $e_2, e_3, \dots, e_d$

$\Longrightarrow \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i=j}$

et $x_i = 0$ pour $i = 1, \dots, d$.

$B^* = \{e_i^* \ i \leq d\}$ est libre donc est une base (et generatrice)

$\square$

Corollaire 6.2. *Soit $\ell : V \mapsto K$ une forme lineaire. On a*

$$\ell = \sum_{i=1}^{d} \ell(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i^*.$$

Autrement dit, les coordonnees de ℓ dans la base $\mathscr{B}^*$ sont donnees par les $(\ell(\mathbf{e}_i))_{i\leqslant d}$ (ie. les valeurs de ℓ en chacun des $\mathbf{e}_i$, $i \leqslant d$).

Preuve : Soit $\ell \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$

On sait que

$$\ell = x_1 e_1^* + \cdots + x_d e_d^* \quad x_i \in K$$

$$\ell(e_1) = x_1 e_1^*(e_1) + \cdots + x_d e_d^*(e_1)$$

$$= x_1$$

$, \ell(e_2) = x_2 \; \ldots\ldots \quad \ell(e_d) = x_d$

$$\Rightarrow \quad \ell = \ell(e_1)e_1^* + \ldots\ldots + \ell(e_d)e_d^*$$

$\square$

Pour exhiber un isom K^d et V on se donne une base $\mathcal{B}$ et on considère $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$

$$CL_{\mathcal{B}} : K^d \longrightarrow V$$
$$(x_1, \dots, x_d) \longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$$

$$CL_{\mathcal{B}^*} : K^d \longrightarrow V^*$$
$$(x_1, \dots, x_d) \longmapsto x_1 e_1^* + \dots + x_d e_d^*$$

si $(x_1, \ldots, x_d) \xrightarrow{CL_{B^*}} \ell = x_1 e_1^* + \cdots + x_d e_d^*$

$x_1 = \ell(e_1), \ldots, x_d = \ell(e_d)$

$$CL_{B^*}^{-1} = Eval_B : \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & K^d \\ \ell & \longmapsto & (\ell(e_1), \ldots, \ell(e_d)) \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme

$$CL_B \circ Eval_B : V^* \xrightarrow{\sim} V$$

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[dr, "Eval_B"'] \arrow[rr, "\sim"] & & V \\ & K^d \arrow[ur, "CL_B"'] & \end{tikzcd}$$

⚡ THE WARNING ⚡

Cet isomorphisme $V^* \simeq V$ dépend du choix de B

Bidualite : $(V^*)^*$ = le bidual de V

$V^{**} \simeq V^*$ mais pas canoniquement

$V^{**} \simeq V^* \simeq V$

$V^{**} \simeq V$.

Exercice : V et canoniquement isomorphe a V^{**}

$$\mathrm{Eval}_\bullet : \begin{array}{ccl} V & \longrightarrow & (V^*)^* \\ v & \longrightarrow & \mathrm{Eval}_v : \ell \longrightarrow \mathrm{Eval}_v(\ell) = \ell(v) \end{array}$$

$\mathrm{Eval}_\bullet$ est linéaire et est un isomorphisme de V vers V^{**}.

– On dispose d'une application

$$\langle \bullet , \bullet \rangle_{can,V} : \begin{array}{ccl} V^* \times V & \longrightarrow & K \\ (\ell, v) & \longrightarrow & \ell(v) \end{array}$$

$\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathrm{can}, V}$ s'appelle l'accouplement canonique entre V^* et V.

Il est dit "parfait".

Representations parametrique / Cartesienne d'un SEV

$W \subset V$.

Parametrique : Soit $\mathcal{G}_W = \{e_1, \dots, e_g\}$ une famille generatrice de W

alors

$$W = \{x_1 e_1 + \dots + x_g e_g \ (x_1, \dots, x_g) \in K^g\}$$
$$= CL_{\mathcal{G}}(K^g)$$

= representation paramétrique de

W (par g)

Proposition 6.6 (Representation cartesienne d'un SEV). *Soit $W \subset V$ un SEV (distinct de V). Il existe un entier $d' \geqslant 1$ et une famille de d' formes lineaires*

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d'}\} \subset V^*$$

telles que

$$W = \{w \in V \text{ tels que } \ell_1(w) = 0,\ \ell_2(w) = 0, \cdots, \ell_{d'}(w) = 0\}.$$

De maniere equivalente, $W = \ker \varphi_{\mathcal{L}}$ avec

$$\varphi_{\mathcal{L}} : w \in V \mapsto (\ell_1(w), \cdots, \ell_{d'}(w)) \in K^{d'}.$$

$d_V - d_W = \operatorname{codim} W$

En fait on peut prendre $d' = d_V - d_W$ et la famille

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \cdots, \ell_{d_V - d_W}\} \subset V^*$$

forment une famille libre de V^* (ie. les ℓ_i, $i \leqslant d_V - d_W$ sont lineairement independantes).

<u>Preuve</u>: soit $B_W = \{e_1, \cdots, e_{d_W}\}$ une base de W, on peut completer B_W en une base de V $B_V = \{e_1, \cdots, e_{d_W}, e_{d_W+1}, \cdots e_{d_V}\}$

et soit $B_V^* = \{e_1^*, \dots, e_{d_W}^*, e_{d_W+1}^*, \dots, e_{d_V}^*\}$

la base duale

alors $W = \{v \in V \text{ tq } e_i^*(v) = 0 \ \ i \geq d_W + 1\}$

est representé par l'annulation de $d_V - d_W$

forme linéaires qui sont

linéairement indep.

On montre que toute rep cartesienne de W (par l'annulation de d' formes lineaire) requier que

$$d' \geq d_V - d_W.$$

$\square$

Base de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Application linéaires élémentaires

Soit $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ = base de V

Soit $B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$ = base de W

$d = \dim V \quad d' = \dim W$

Soit $B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ la base duale de V

Pour $1 \leq i \leq d'$ $1 \leq j \leq d$ on pose

$$\mathcal{E}_{ij} : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto e_j^*(v) \cdot f_i$$

associe a v le multiple du i-eme vecteur de la base B' de W donne par la j-ieme coordonnée de v.

LEMME 6.1. *L'application* $\mathcal{E}_{ij} : V \mapsto W$ *est lineaire, de rang 1, d'image* $K.\mathbf{f}_i$ *et de noyau*

$$\ker \mathcal{E}_{ij} = \langle \mathscr{B} - \{\mathbf{e}_j\} \rangle = K.\mathbf{e}_1 + \cdots + K.\mathbf{e}_{j-1} + K.\mathbf{e}_{j+1} + \cdots + K.\mathbf{e}_d$$

l'hyperplan vectoriel engendre par les vecteur de la base $\mathscr{B}$ *moins le vecteur* $\mathbf{e}_j$.

<u>Preuve</u> $\ker \mathcal{E}_{ij} = \ker(e_j^*)$

$$\mathcal{E}_{ij}(\lambda v + v') = e_j^*(\lambda v + v') . f_i$$

$$= (\lambda x_j + x_j') f_i$$

$v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \quad v' = x_1' e_1 + \dots + x_d' e_d$

$$= \lambda x_j . f_i + x_j' . f_i = \lambda \mathcal{E}_{ij}(v) + \mathcal{E}_{ij}(v')$$

$\mathcal{E}_{ij}(v) \in K f_i$ et $\mathcal{E}_{ij}(e_j) = f_i$

$\mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{ij} = K . f_i$

$\mathcal{E}_{ij}(v) = 0_W$ ssi $e_i^*(v) = 0_K$

$\ker \mathcal{E}_{ij} = \ker(e_j^*)$.

$\square$

On a la formule : $k=1\dots d$

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{j=k} \cdot f_i$$

$$= \begin{cases} 0_W & \text{si } j \neq k \\ f_i & \text{si } j = k \end{cases}$$

Définition 6.7. *Soit V, W des K-EV de dimensions finies d, d' et*

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \text{ et } \mathscr{B}' = \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_{d'}\}$$

des bases de V et W et $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale de $\mathscr{B}$.

Pour $i \leqslant d'$, $j \leqslant d$ les applications lineaires definies par

$$\mathcal{E}_{i,j} : v \in V \mapsto \mathbf{e}_j^*(v).\mathbf{f}_i \in W$$

sont appellees applications lineaires elementaires associees aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Théorème 6.4 (Une base de l'espace des applications lineaires). *La famille des applications lineaires elementaires*

$$\mathcal{B}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} := \{\mathcal{E}_{ij},\ i \leqslant d',\ j \leqslant d\} \subset \mathrm{Hom}_{K-ev}(V, W)$$

forme une base de $\mathrm{Hom}_{K-ev}(V, W)$.

THE WARNING

Cette base depend des choix de B et B'.

<u>Preuve</u>: Il suffit de mq $\{\mathcal{E}_{ij} \; i\leq d', j\leq d\}$ est libre : Soient $(m_{ij})_{i\leq d', j\leq d}$ tq $\sum_{i=1}^{d'}\sum_{j=1}^{d} m_{ij}\mathcal{E}_{ij} = 0_W$

on va mq les m_{ij} sont tous 0_K

On calcule

$$\left(\sum_i \sum_j m_{ij} \varepsilon_{ij}\right)(e_k) = 0_W$$

$$= \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^{d} m_{ij} \varepsilon_{ij}(e_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{d'} m_{ik} f_i = 0_W \quad \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \forall i = 1 \dots d' \quad m_{ik} = 0$$

($\{f_i \; i = 1 \dots d'\}$ forment une base de W)

et donc $\forall k \leq d \; \forall i \leq d \quad m_{ik} = 0$

$\square$